Oraux ; Série N°6

Exercice 1 On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ est absolument croissante si $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)} \geq 0$.

1. Soit $\beta > 0$. Montrer que $f \colon x \mapsto (1-x)^{-\beta}$ est absolument croissante sur $[0,1[$.
2. ★ Montrer que si f est absolument croissante sur I, $g = e^f$ l'est également.

Exercice 2 1. Déterminer la limite de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$

a) par une comparaison $\sum / \int$. b) à l'aide d'une somme de Riemann. c) en l'exprimant à l'aide de H_n

2. Limite de la suite de terme général $\sum_{k=1}^{n} \tan\left(\frac{1}{k+n}\right)$.

Exercice 3 1. Étudier la suite vérifiant $u_0 = 2$ et $\forall n,\ u_{n+1} = \ln(1+u_n)$. 2. Nature de $\sum u_n^2$. **Ind** : *Utiliser un* DL.

3. Déterminer α tel que $u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha}$ converge vers une limite non nulle. En déduire un équivalent de u_n.

Exercice 4 [Mines PC 2023] Soit $a_0, \dots, a_n$ des réels. Montrer que $a_0 \neq 0$ si et seulement si pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$, il existe un unique $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q = \sum_{k=0}^{n} a_k P^{(k)}$. **Ind** : *Traiter le cas* $n = 1, a_0 = 1, a_1 = 1$.

Exercice 5 [Mines PC 2023] Soit X une variable aléatoire réelle, $b > 0$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ telle que $\forall x \in I,\ g(x) \geq b$.

1. Montrer que $P(X \in I) \leq \frac{E(g(X))}{b}$.
2. On suppose que X est centrée ($E(X) = 0$). Montrer que $\forall t > 0,\ P(X > t) \leq \frac{V(X)}{V(X)+t}$.

   Ind : *Utiliser une fonction* $x \mapsto (x+c)^2$, *pour un réel* $c > 0$.

Exercice 6 [IMT 2023] Soit $n \geq 1$.

1. Montrer qu'il existe un unique couple (P, Q) de polynômes réels de degrés $< n$ tels que $(1-X)^n P(X) + X^n Q(X) = 1$.
2. Montrer que $Q(X) = P(1-X)$

Exercice 7 [X MP 2023] Soit p premier. Trouver tous les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $(X+Y)^n$ soit congru a $X^n + Y^n$ modulo p.

Exercice 8 [ENS 2023] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. On considere un échiquier $n \times n$. On colorie chaque case en rouge (resp. en bleu) avec probabilité p (resp. $1-p$). On note $Q(p)$ la probabilite pour qu'il existe un chemin joignant le bord gauche au bord droit constitué uniquement de cases rouges (les deplacements ne se font pas en diagonale). Que dire de la fonction Q ?

Exercice 9 [X MP 2023] Soient G un groupe et T l'ensemble des éléments de G d'ordre fini.

1. Soit S une partie finie de G stable par conjugaison munie d'une relation d'ordre totale $\leq$. Montrer que, pour tous $s_1, \dots, s_r \in S$, il existe $s_1', \dots, s_r' \in S$ tels que $s_1' \leq s_2' \cdots \leq s_r'$ et $s_1 s_2 \cdots s_r = s_1' s_2' \cdots s_r'$. **Ind** : *Traiter* $r = 2$.
2. Avec la question précédente, montrer que, si T est fini, alors T est un sous-groupe de G. Contre-exemple si T est infini.

Oraux ; Série N°6

Exercice 1 On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ est absolument croissante si $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)} \geq 0$.

1. Soit $\beta > 0$. Montrer que $f \colon x \mapsto (1-x)^{-\beta}$ est absolument croissante sur $[0,1[$.
2. ★ Montrer que si f est absolument croissante sur I, $g = e^f$ l'est également.

Exercice 2 1. Déterminer la limite de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$

a) par une comparaison $\sum / \int$. b) à l'aide d'une somme de Riemann. c) en l'exprimant à l'aide de H_n

2. Limite de la suite de terme général $\sum_{k=1}^{n} \tan\left(\frac{1}{k+n}\right)$.

Exercice 3 1. Étudier la suite vérifiant $u_0 = 2$ et $\forall n,\ u_{n+1} = \ln(1+u_n)$. 2. Nature de $\sum u_n^2$. **Ind** : *Utiliser un* DL.

3. Déterminer α tel que $u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha}$ converge vers une limite non nulle. En déduire un équivalent de u_n.

Exercice 4 [Mines PC 2023] Soit $a_0, \dots, a_n$ des réels. Montrer que $a_0 \neq 0$ si et seulement si pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$, il existe un unique $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q = \sum_{k=0}^{n} a_k P^{(k)}$. **Ind** : *Traiter le cas* $n = 1, a_0 = 1, a_1 = 1$.

Exercice 5 [Mines PC 2023] Soit X une variable aléatoire réelle, $b > 0$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ telle que $\forall x \in I,\ g(x) \geq b$.

1. Montrer que $P(X \in I) \leq \frac{E(g(X))}{b}$.
2. On suppose que X est centrée ($E(X) = 0$). Montrer que $\forall t > 0,\ P(X > t) \leq \frac{V(X)}{V(X)+t}$.

   Ind : *Utiliser une fonction* $x \mapsto (x+c)^2$, *pour un réel* $c > 0$.

Exercice 6 [IMT 2023] Soit $n \geq 1$.

1. Montrer qu'il existe un unique couple (P, Q) de polynômes réels de degrés $< n$ tels que $(1-X)^n P(X) + X^n Q(X) = 1$.
2. Montrer que $Q(X) = P(1-X)$

Exercice 7 [X MP 2023] Soit p premier. Trouver tous les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $(X+Y)^n$ soit congru a $X^n + Y^n$ modulo p.

Exercice 8 [ENS 2023] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. On considere un échiquier $n \times n$. On colorie chaque case en rouge (resp. en bleu) avec probabilité p (resp. $1-p$). On note $Q(p)$ la probabilite pour qu'il existe un chemin joignant le bord gauche au bord droit constitué uniquement de cases rouges (les deplacements ne se font pas en diagonale). Que dire de la fonction Q ?

Exercice 9 [X MP 2023] Soient G un groupe et T l'ensemble des éléments de G d'ordre fini.

1. Soit S une partie finie de G stable par conjugaison munie d'une relation d'ordre totale $\leq$. Montrer que, pour tous $s_1, \dots, s_r \in S$, il existe $s_1', \dots, s_r' \in S$ tels que $s_1' \leq s_2' \cdots \leq s_r'$ et $s_1 s_2 \cdots s_r = s_1' s_2' \cdots s_r'$. **Ind** : *Traiter* $r = 2$.
2. Avec la question précédente, montrer que, si T est fini, alors T est un sous-groupe de G. Contre-exemple si T est infini.